Verlust der Sicherheit

Michael Grosser

1. Einleitung

Dieser Vortrag befaßt sich mit Fragen der Geschichte der Mathematik, ihrer Stellung zu den anderen Wissenschaften und ihrer Bedeutung in der Gesellschaft. Haben solche Gesichtspunkte - noch dazu unter dem beunruhigenden Motto "Verlust der Sicherheit" - überhaupt etwas in einer Lehrerfortbildungsveranstaltung zu suchen? Ich meine: ja, auf jeden Fall. Drei Gründe erscheinen mir wesentlich:

1. Wer Mathematik unterrichtet, steht laufend vor der Notwendigkeit, sein Tun zu legitimieren: vor sich selbst, vor seinen Schülern oder Studenten+), vor deren Eltern, vor dem Dienstgeber, vor gesellschaftlichen Instanzen. Fragen wie: "Wozu brauche ich Mathematik?" - "Sollte ihr Anteil am Unterricht nicht drastisch reduziert werden?" - "Erziehen Sie nicht junge Menschen mit zu gläubigen Technokraten, denen Logik und Rationalität der höchste Wert ist?" - "Welche Rolle spiele ich als Mathematiklehrer - freiwillig oder unfreiwillig, bewußt oder unbewußt?" - solche und ähnliche Fragen wollen beantwortet werden. Wer da nichts Besseres anzubieten hat als hohle Phrasen, wie "Mathematik schult das logische Denken. Sie fördert das Streben nach Wahrheit und Objektivität. Sie ist notwendige Vorbereitung auf das Leben in unserer hochtechnisierten Industriegesellschaft", der wird es schwer haben, in der Diskussion über sein eigenes Fach zu bestehen. Damit disqualifiziert er sich selbst.

2. So sehr viele Schüler auch Mathematik ablehnen, sind sie oft froh, wenigstens ein Fach zu haben, das ihnen Sicherheit gibt, da dort jedenfalls von der Sache her "Objektivität"

+) Wenn ich im folgenden der Kürze und besseren Lesbarkeit halber immer von "Lehrern" und "Schülern" spreche, sind selbstverständlich immer Lehrer und Lehrerinnen, Schüler und Schülerinnen gemeint.

herrscht. Ich war überrascht, als ich einmal als Gast in einer Philosophiestunde in einer 8.Klasse miterleben konnte, wie Schüler jede kritische Sicht von Mathematik geradezu ängstlich zurückwiesen, da sie sie anscheinend als Bedrohung ihrer intellektuellen "Sicherheit" empfanden. Der Lehrer steht also vor der Frage, inwieweit er im Mathematikunterricht Gewißheit als festen Punkt in einer komplexen, oft verwirrenden Gesellschaft anzubieten hat. Kann/soll/will er den Schülern eine Scheinsicherheit verkaufen oder diese in Frage stellen?

3. Naturwissenschaftliche Argumente spielen in der Diskussion sozialer, politischer und gesellschaftlicher Fragen eine wachsende Rolle. Wer wagt zu widersprechen, wenn ein Politiker sagt:"Es ist doch längst wissenschaftlich erwiesen, daß..." - selbst wenn das Gegenteil ebenso wissenschaftlich (allerdings nicht von denselben Wissenschaftlern) erwiesen wurde?

Ich sehe einen der wesentlichen Aufträge an den Lehrer - speziell in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern - die Schüler anzuregen, einen scharfen "Durchblick" gegenüber solchen "Argumentationsweisen" zu entwickeln. Nur wer über (naturwissenschaftliches) Sachwissen hinaus auch die Rolle dieser Wissenschaften und überhaupt rationalen Denkens in der Gesellschaft sieht und reflektiert, hat Chancen, über den Status eines Nachplapperers und "Nach-Denkers" der herrschenden Meinung (im doppelten Sinn!) hinauszugelangen.

2. Geschichtliche Entwicklung bis etwa 1900

Wenn in einem doch kurzen Vortrag bzw.Aufsatz geschichtliche Entwicklungen über Jahrtausende und über verschiedene Völker und Gesellschaftssysteme hinweg in Betracht gezogen werden, ergeben sich aus dem Zwang zur Kürze notwendig Auslassungen, Simplifikationen und sogar Verzerrungen. Im folgenden ist also immer zu bedenken, daß nur die wesentlichsten Entwicklungslinien angesprochen werden können, und auch das meist nur an der Oberfläche.

2.1. Der wahre Konstruktionsplan der Welt

Folgen wir zunächst den Gedankengängen von M.Kline in seinem Buch "Mathematics - The Loss of Certainly" ([K2]). Er erklärt gleich zu Beginn, sein Buch behandle "Aufstieg und Niedergang der Majestät der Mathematik" ([K 2,S.3]) - wohlgemerkt, nicht der Mathematik schlechthin: Hier von Niedergang zu sprechen, wäre angesichts ihrer stetig wachsenden Bedeutung in so vielen Bereichen absurd. Die "Majestät der Mathematik" ist für Kline ihr Anspruch, Aussagen von absoluter Gültigkeit, von unumstößlicher Gewißheit machen zu können. Den Niedergang bzw. die Relativierung dieser Gewißheit und den damit einhergehenden Verlust an (geistiger) Sicherheit will uns Kline vor Augen führen. Meiner Meinung nach ist dies ein Anliegen, das auch für die Schulpraxis äußerst relevant ist: Speziell die Lehrer der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer sollten ihren Schülern die Fähigkeit vermitteln, sich kritisch und selbständig zu verhalten.

Wir sind heute in wachsendem Ausmaß mit Aussagen und Urteilen konfrontiert, die ihren wertenden Charakter (ein solcher ist hier durchaus nicht in einem prinzipiell negativen Sinn gemeint) hinter der vorgeblichen Unangreifbarkeit und Unhinterfragbarkeit der mathematisch-naturwissenschaftlichen Methode verschanzen wollen. Speziell die Lehrer dieser Fächer sollten ihren Schülern die Fähigkeit vermitteln, sich solchen Aussagen gegenüber kritisch und selbständig zu verhalten.

Im Denken der alten Griechen konnte die Mathematik - gemeint ist hier die deduktive Mathematik, wie sie in den "Elementen" Euklids einen Höhepunkt findet - ihren Gewißheitsanspruch einlösen. Sie war für die griechischen Philosophen nicht Produkt des Mathematikers, sie lag vielmehr der "realen" Außenwelt als Konstruktionsplan, ja sogar als eigentlicher Kern des Existierenden (so die Pythagoräer) zugrunde. Sicherlich gab es verschiedene Sichtweisen: Wo Plato die Begriffe der Mathematik in der für ihn ohnehin "realsten" Welt der Ideen ansiedelte, da waren sie etwa für Aristoteles aus der materiellen Welt, in der der Mensch handelt, durch Abstraktion "extrahiert". Übereinstimmend galten die Aussagen der Mathematik als Wahrheiten über die tatsächlich existierende Welt. Dabei floß die Wahrheit aufgrund unmittelbarer Evidenz in die Axiome ein und pflanzte sich über die Kanäle der deduktiven Ableitung in die einzelnen Sätze fort.

Im Europa der Renaissance wurde die deduktive Mathematik der Griechen wiederaufgenommen. Dabei stellte sich das Problem, wie die Gedanken der heidnischen Philosophen/Mathematiker des Altertums mit der christlichen Weltanschauung in Einklang gebracht werden könnten. Vereinfacht gesagt, wurde zwar die Auffassung beibehalten, die Mathematik sei der der Natur zugrundeliegende Konstruktionsplan, doch war es diesmal der Plan Gottes des Schöpfers. Newton äußerte in der Tat, Gott müsse ein sehr begabter Mathematiker gewesen sein, da er das Universum so klug eingerichtet habe. In diesem Sinne verstanden Mathematiker, Naturwissenschaftler und Philosophen ihre wissenschaftliche Tätigkeit explicit als Lobpreisung Gottes, dessen Schöpfungsplan sie Stück für Stück aufdeckten. Als bedeutendste Namen wären hier etwa Kopernikus, Kepler, Descartes und Pascal zu nennen. Von Galilei wurde zum erstenmal klar ausgesprochen, daß das Programm der Naturwissenschaften nicht mehr in der Erklärung der Naturvorgänge, sondern in ihrer (mathematischen) Beschreibung bestehen sollte: Wo Aristoteles die Tatsache,daß "unten" der natürliche Ort schwerer Körper sei, als treibenden Grund für die Fallbewegung sieht, konstatiert Galilei $S = \frac{g}{2}t^2$ (und auch das nur für den idealisierten Fall eines homogenen Schwerefeldes im Vakuum). Im philosophischen Sinn kann der Übergang zu einem Programm der Beschreibung als Einschränkung oder Verarmung gesehen werden; wir können jedoch aus heutiger Sicht rückblickend erkennen, welch enorme Bedeutung für die Entwicklung der Naturwissenschaften gerade dieser Standpunktwechsel gehabt hat. Das Gravitationsgesetz Newtons "erklärt" ja nichts - der Kraftbegriff ist sozusagen eine anthropomorphe Fiktion, in der das subjektive Erleben der Möglichkeit, Muskelkraft auf einen Körper auszuüben, gewissermaßen auf zwei Millionen Kilometer voneinander entfernte Körper übertragen wird. Die Rolle der Mathematik für die Physik hat dabei einen entscheidenden Wandel erfahren: Früher eher eine Art Mittel zum Zweck, stellte sie nunmehr sogar die Begriffe für die Formulierung der physikalischen Gesetze zur Verfügung: "Beschleunigung" in Newtons 2.Axiom ist die 2.Ableitung der Ortsfunktion, also ein mathematischer Begriff, und noch dazu ein relativ komplizierter.

Ausgehend von der Erfindung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz haben sich gewaltige Erfolge auf fast allen Gebieten eingestellt, immer mehr Naturerscheinungen konnten der mathematischen Beschreibung zugänglich gemacht werden. Diese stürmische Entwicklung der Mathematik verlief allerdings zum großen Teil weitab von den Maßstäben mathematischer Strenge, wie sie die Griechen angelegt hatten. Dennoch erwies sich die Mathematik in ihren Anwendungen alsgeradezu unglaublich erfolgreich.

2. Krisen und Reparaturen

"Eine Mischung aus Intuitionen, raffinierten Annahmen, unkritisch angewandten, rein formalen Operationen und physikalischen Argumenten brachte die Mathematiker dazu, Aussagen als Sätze zu bezeichnen" ([K1,S.200]). Manche Mathematiker mißachteten ganz offen die Strenge:"...Pedanterie, die die Mittel über die Zwecke setzt" (J.Hoëne-Wronski), "Solche Subtilitäten, um die sich die Griechen sorgten, haben wir nicht mehr nötig" (S.Lacroix) ([K2, S.166]).

Allerdings wäre es grundlegend verfehlt, den damaligen Mathematikern den Vorwurf der Schlamperei zu machen. Die Geschichte der Mathematik zeigt, daß - entgegen der weitverbreiteten Auffassung - Exaktheit ein historisch sich wandelnder und entwickelnder Begriff ist (s.[L1],[L2]). Höchstwahrscheinlich hätte die heute jedem Erstsemestrigen eingedrillte "Strenge" die damalige Entwicklung schwerst behindert oder gar unmöglich gemacht. "Hätten Newton und Leibniz gewußt, daß stetige Funktionen nicht notwendigerweise differenzierbar sind, wäre die Differentialrechnung nie erfunden worden", meinte E.Ricard ([K2,S.177]).

War auch im Zuge dieser Entwicklung Gott als mathematischer Gesetzgeber des Universums mehr und mehr in den Hintergrund getreten, so wurde die Mathematik dennoch als Gebäude von

Wahrheiten angesehen, die der Natur inhärent seien. Der erste entscheidende Schlag wurde dieser Sichtweise durch die sogenannten Nichteuklidischen Geometrien (Gauß, Bolyai, Lobatschewski) versetzt: In diesen Systemen gibt es zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt keine oder aber sogar mehrere Parallelen. Das entscheidende Faktum war - und das dürfte Gauß als Erster in voller Tragweite erkannt haben - daß sich nicht a priori entscheiden läßt, welche der einander widersprechenden Geometrien auf den physikalischen Raum zutrifft, sondern nur durch das Experiment, und auch dann natürlich nur im Rahmen der Meßgenauigkeit. Damit hatte Mathematik den unhinterfragten Status der"Wahrheit über die physikalische Natur" verloren. Es war klar geworden, daß der Mensch "künstlich" mathematische Theorien schaffen kann, die nicht notwendig der Natur zugrundeliegende Strukturen darstellen. Diese Wendung bedeutete einen entscheidenden Einschnitt in der Geschichte des Wahrheitsproblems in der Mathematik.

Die Entwicklung der Nichteuklidischen Geometrien war nur einer in einer ganzen Reihe von Einbrüchen in das vermeintlich so unerschütterliche Gebäude der Mathematik. In der Algebra stellten die Quaternionen W.R.Hamiltons einen Markstein dar. Die Verletzung des Kommutativgesetzes ab=ba einerseits und die Anwendbarkeit der Quaternionen in der Physik andererseits zeigten, daß es nicht "die eine wahre, der Natur zugrundeliegende Algebra", sondern viele "Algebren" gibt.

Auch die Maßstäbe mathematischer Strenge entwickelten sich weiter, praktisch die gesamte Mathematik wurde grundlegender Kritik von ihnen her unterzogen. Es zeigte sich, daß es sehr viel instandzusetzen gab: In der Arithmetik gab es damals keine klaren Vorstellungen, wie man die reellen oder rationalen Zahlen, ja sogar die nämlichen Zahlen begrifflich genau fassen könnte. Und doch ruhte auf diesem großteils intuitiven Fundament die gesamte Analysis! Abel äußerte 1926: "[Analysis] wurde nie in voller Strenge abgehandelt. Es gibt [nur] wenige Sätze der höheren Analysis, die in logisch haltbarer Weise bewiesen worden sind" ([K2, S.170]). Auch in der Geometrie Euklids, die durch Jahrtausende als Ideal der Strenge und Exaktheit gegolten hatte,

wurden beim Anlegen der neuen Maßstäbe Schwächen und Mängel entdeckt. Schließlich wurde auch das Fehlen einer explizit formulierten, formalisierten Logik als Mangel empfunden.
Die Situation um 1800 war also in vieler Hinsicht unbefriedigend. Es war eine der entscheidenden Leistungen des 19.Jahrhunderts, diese Defekte zu reparieren". Als wichtigste Namen, die damit verbunden waren, wären etwa zu nennen: B.Bolzano, N.-H.Abel, A.-L.Cauchy (Analysis); K.Weiershaß, R.Dedekind, G.Cantor (Theorie der reellen Zahlen); M.Pasch, D.Hilbert (Euklidische Geometrie); G.Boole, G.Frege, G.Peano (Logik). Diese Namen stellen natürlich nur eine - relativ willkürliche - Auswahl dar.

Immerhin war die Restaurierung bis 1900 so weit gelungen, daß H.Poincaré auf dem 2.internationalen Kongreß in Paris 1900 meinte: "Man darf heute behaupten, daß absolute Strenge erreicht worden ist" ([K2, S.195]). Poincarés Optimismus war fehl am Platz. Neue gewaltige Schwierigkeiten entstanden aus einer Disziplin, die erst jüngst von Cantor begründet worden war und die in der Grundlegung der Mathematik rasch eine entscheidende Rolle spielte: Einerseits schleppte die Mengenlehre verschiedene Widersprüche (verschämt "Paradoxa" genannt[1]) in die Mathematik ein, andererseits erhoben sich heftige Auseinandersetzungen, ob gewisse ihrer Axiome (z.B. das sogenannte Auswahlaxiom[2]) in der Mathematik zulässig seien, und schließlich ergaben sich brennende Fragen über zentrale Gebiete der Mathematik, die sich einer Lösung hartnäckig zu widersetzen schienen (so z.B. die Kontinuismushypothese der reellen Zahlen). Man mußte also kurz nach 1900 in der Tat von einer (vielleicht der schwersten) Grundlagenkrise der Mathematik sprechen. Zu ihrer Lösung wurden verschiedene Versuche unternommen.

---

1) Beispiele: Sei A Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, dann gilt zugleich $A \in A$ und $A \notin A$ (Russell'sches Paradoxon).
Sei B die Menge der natürlichen Zahlen, die sich mit höchstens hundert deutschen Worten definieren lassen (B ist endlich); für die kleinste natürliche Zahl x, die sich nicht mit hundert Worten definieren läßt, gilt sowohl $x \notin B$ als auch $x \in B$ (Wortparadoxon).

2) Verwirft man das Auswahlaxiom, muß man große Teile der klassischen Mathematik aufgeben; akzeptiert man es, läßt sich ein Satz beweisen, nach dem sich eine Kugel durch Zerlegen in endlich viele Teile, Bewegen der Teile und Wiederzusammensetzen in eine kleinere Kugel verwandeln läßt (Banach-Tarski); keine der beiden Möglichkeiten ist völlig zufriedenstellend.

3. Lösungsansätze

3.1. Logizismus

Einen dieser Versuche, die Grundlagenfragen der Mathematik umfassend und befriedigend zu beantworten, wurde von B.Russell und A.N.Whitehead unternommen. Ihr Werk "Principian Mathematica" (1.Auflage 1913, 2.Auflage 1926) zielte darauf ab, die gesamte Mathematik auf (formalisierte) Logik aufzubauen. Nach diesem Ansatz gibt es keine eigenen mathematischen Axiome. Mathematik erscheint im Logizismus als Fortsatz der Logik. Die Frage der Wahrheit löst sich dahingehend, daß Aussagen der Mathematik als deduktive Folgerungen aus der offensichtlich wahren Aussagen der Logik selbst wahr sind. Die bekannten Paradoxien werden durch die sogenannte "Typentheorie" vermieden. Eine Menge von Objekten einer bestimmten Stufe gehört zur nächsthöheren Stufe; damit sind die paradoxieträchtigen Zirkel eliminiert, allerdings auf Kosten der Einfachheit der Theorie.

Dem Logismus ist es nicht gelungen, eine allgemein anerkannte Grundlage der Mathematik zu entwickeln, obwohl seine Schule auch heute noch betrieben wird. Die Kritiker machen vor allem folgende Einwände geltend:

- Unter den von Russell und Whitehead verwendeten Axiomen der Logik sind zwei, die von vielen als nicht zur Logik gehörig oder überhaupt nicht akzeptiert werden: Das Unendlichkeitsaxiom behauptet die Existenz unendlicher Mengen, das Reduzibilitätsaxiom erlaubt die Ersetzung von Aussagen höheren Typs durch solche des niedrigsten; erst das ermöglicht die Betrachtung der reellen Zahlen als Objekte gleichen Typs.
- Die Theorie ist außerordentlich kompliziert.
- Die "Prinzipia" rekonstruierten nur einen kleinen Teil der klassischen Mathematik auf Grundlage der Logik, große Gebiete wurden nicht aufgearbeitet.

Bleibendes Verdienst des Logizismus ist jedoch der Durchbruch, in dem Bemühen, Logik zu axiomatisieren und Mathematik zu formalisieren.

3.2. Intuitionismus

In radikalem Gegensatz zum Logizismus nimmt die intuitionistische Schule, die vom Holländer L.Brouwer begründet wurde, den Menschen, genauer gesagt, seine sogenannte "mathematische Urintuition" zum Ausgangspunkt für ihren Versuch der Grundlegung der Mathematik. Mathematik ist für die Intuitionisten inhaltlich zu verstehen; entscheidendes Kriterium für die Richtigkeit mathematischer Sachverhalte ist ihre Annehmbarkeit für die mathematische Intuition des Menschen. Mathematik stammt nach diesem Verständnis nicht aus der Erfahrung; die mathematische Intuition ist auch kein sprachliches Phänomen. Im Gegenteil, Sprache wird als unvollkommenes Mittel zur Mitteilung der intuitiv klaren mathematischen Sachverhalte angesehen, das die volle Realität der Intuition gar nicht vollständig wiederzugeben vermag. Logik gehört dem Bereich der Sprache an und hat für die Mathematik nur untergeordnete Bedeutung.

Die radikale Kritik der Intuitionisten läßt von der klassischen Mathematik nicht viel übrig. Da sie das "Prinzip des ausgeschlossenen Dritten" (von einer Aussage und ihrer Negation ist stets eines wahr), angewandt auf unendliche Mengen, nicht akzeptieren und auch Existenzbeweise, die keine Konstruktionsvorschrift für das gesuchte Objekt liefern, ablehnen, muß praktisch die gesamte Mathematik auf dieser eingeschränkten Grundlage neu aufgebaut werden. Obwohl hier beträchtliche Arbeit geleistet worden ist, mußte man dennoch auf bedeutende Teile der klassischen Mathematik verzichten. Hilbert wetterte gegen diese "Verstümmelung" der Mathematik durch die Intuitionisten. Neben diesem Einwand wurde auch geltend gemacht, daß auch die intuitionistischen Beweismethoden Sätze liefern, die sehr unanschauliche Sachverhalte behaupten, daß jedoch intuitiv durchaus plausibel erscheinende Sachverhalte falsch sind, daß also die Intuition keinen geeigneten Prüfstein für mathematische Richtigkeit darstellt, Bleibendes Verdienst des Intuitionismus stellt die Rückbesinnung auf den inhaltlichen Aspekt der Mathematik und die Betonung konstruktiver Verfahren dar, die ja gerade heute für auf Großrechenanlagen betriebene numerische Mathematik von grundlegender Bedeutung sind.

3.3. Formalismus

Auf eine ganz andere Weise als die Intuitionisten wollte D.Hilbert, der Begründer der Schule des Formalismus, "die definitive Sicherheit der mathematischen Methode herstellen" ([H,S.162]). Einerseits ist die Intuition allein für ihn ein viel zu unsicheres Fundament: Er will auf Axiome und deduktive Ableitung nach den Prinzipien der klassischen Logik bauen, allerdings in einem viel präziseren Sinn als bisher. Außerdem ist er nicht bereit, alle diejenigen Resultate oder sogar Gebiete der traditionellen Mathematik aufzugeben, auf die die Intuitionisten aufgrund ihrer radikalen Kritik verzichten müssen. Im Gegensatz zur Auffassung der Logizisten ist die Mathematik für Hilbert nicht bloß "Auswuchs" der Logik; jeder Zweig der Mathematik hat neben den logischen Axiomen auch eigene mathematische Axiome.

Für Hilbert bestand die anzustrebende Lösung des Grundlagenproblems im wesentlichen darin, die klassische Mathematik bzw.Teile von ihr zu formalisieren und zu axiomatisieren, und dann den Nachweis der Konsistenz (Widerspruchsfreiheit) und Vollständigkeit der betreffenden formalen Systeme zu führen. Dieser Nachweis sollte im Rahmen seiner "Beweistheorie" (oder "Metamathematik") mit Mitteln einer endlichen Logik (wie sie sogar die Intuitionisten akzeptieren würden) gegeben werden.

Die Formalisierung besteht darin, mathematische Aussagen und Beweise auf genau definierte Weise durch gewisse Formeln und bestimmte Ableitungsregeln darzustellen. Von einer Folge solcher Formeln läßt sich dann durch ein endliches Verfahren eindeutig feststellen, ob sie einen Beweis für eine bestimmte Formel darstellt oder nicht.

Da Axiome verschiedener in der Mathematik zugelassener Systeme einander widersprechen können (z.B.Parallelaxiom in Euklidischer und Nichteuklidischer Geometrie), kann es nicht um die "Wahrheit" der Axiome und Sätze gehen. Wesentliches Kriterium für die prinzipielle Existenz(berechtigung) eines formalisierten

Systems ist dessen Konsistenz (Widerspruchsfreiheit), d.h. die Tatsache, daß sich mittels der zulässigen Regeln aus den Axiomen kein Widerspruch ableiten läßt. Außerdem soll das System in dem Sinne "vollständig" sein, daß sich jeder sinnvollen Aussage, die sich mit den formalen Mitteln des Systems überhaupt bilden läßt, aus den Axiomen entweder sie selbst oder ihr Gegenteil beweisen läßt. Da es gelungen war, die Konsistenz verschiedener Zweige der Mathematik auf die Konsistenz der Arithmetik (des Systems der reellen Zahlen) zurückzuführen, blieb als entscheidende Aufgabe für die Formalisten der Konsistenzbeweis der Arithmetik zu führen. Teilerfolge in dieser Richtung wurden erzielt; Hilbert war sehr optimistisch, daß der genannte Konsistenzbeweis gelingen würde. Jedoch setzte K.Gödel 1931 diesen Hoffnungen ein jähes Ende: Er bewies einerseits, daß jedes konsistente formale System, das zumindest die Theorie der natürlichen Zahlen umfaßt, unvollständig ist, d.h.sinnvolle Aussagen zuläßt, von denen weder sie selbst noch ihre Negation in diesem System beweisbar sind. Andererseits zeigte er, daß die Widerspruchsfreiheit eines solchen Systems mit Mitteln eines der von den verschiedenen Schulen anerkannten logischen Systeme,(also insbesondere mit Mitteln der "Metamathematik" Hilberts) nicht bewiesen werden kann. Das Programm des Formalismus in seiner ursprünglichen Form war damit gefallen. Dennoch hat diese Schule Beiträge von bleibender Bedeutung zu den Fragen der Axiomatisierung und Formalisierung sowie zur "Metamathematik" (im allgemeinen Sinn) geleistet.

4. Mengentheoretische Schule

Als vierte Schule bezeichnet Kline die mengentheoretische"Grundlegung" der Mathematik. Als ihre Begründer nennt er G.Cantor und E.Zermelo; er zählt auch die Gruppe französischer Mathematiker dazu, die unter dem Pseudomyn N.Bourbaki in einer Buchreihe einen systematischen Aufbau der Mathematik auf der Grundlage der Mengentheorie anstrebt. Die mengentheoretische Schule hat wahrscheinlich das am wenigsten explizit formulierte Programm. Sie verwendet eine in der einen oder anderen Form axiomatisierte Mengenlehre; sie akzeptiert die klassische Logik in ihrer vollen Form, erachtet aber Fragen der Logik oder Konsistenznachweise als nicht zentral. Ihre Grundhaltung hat jedoch bedeutende Auswirkungen auf die Praxis der mathematischen Forschung und Ausbildung, ja sogar bis in die Schulen hinein: Anscheinend sahen manche Pädagogen und Didaktiker in der mengentheoretischen Grundkonzeption dieser einen Schule einerseits die "wahre" Mathematik und andererseits die der Entwicklung des Kindes (nach J.Piaget) angemessene Leitlinie für den Mathematikunterricht.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß keine der genannten Ansätze eine völlig befriedigende Lösung der Grundlagenprobleme gebracht hat. Stellvertretend soll hier B.Russell zitiert werden, der 1958/59 rückblickend feststellte: "Ich wollte Gewißheit in der Art und Weise, in der Menschen religiösen Glauben suchen ..., nach über zwanzig Jahren härtester Arbeit kam ich zu dem Schluß, daß es nichts mehr gab, das ich tun konnte, um mathematisches Wissen unbezweifelbar zu machen... Die glänzende Sicherheit, die ich in der Mathematik stets zu finden gehofft hatte, verlor sich in einem verwirrenden Dickicht" ([K2, S.229f.]). Heute bestehen die verschiedenen Ansätze nebeneinander. Dazu kommt, daß sich Aussagen wie etwa die erwähnte Kontinuumhypothese im Rahmen des üblichen mengentheoretischen Systems von Zermelo-Fraenkel als weder widerlegbar (K.Gödel, 1940) noch beweisbar (P.Cohen, 1963) erwiesen haben. Damit ist ein weiterer Spielraum für die Entscheidung des Mathematikers gegeben, ob er z.B. die Kontinuumhypothese als Axiom annimmt oder verwirft. In diesem Sinne muß man heute tatsächlich von verschiedenen Schulen der Mathematik sprechen, was die Grundlagenfragen betrifft.

4. Einige spezielle Probleme

4.1. Exaktheit

Mathematische Exaktheit ist sprichwörtlich; jedoch täuscht sich die "Volksmeinung" (?), wenn sie mathematische Strenge als absoluten, überzeitlichen Begriff ansieht. Die Auffassung, "richtig" und "falsch" in der Mathematik seien unwandelbare, ahistorische Begriffe, ist heutzutage nicht mehr haltbar. Das haben insbesondere die Arbeiter von J.Lakalos gezeigt. Eine gute Illustration seiner Auffassung gibt er in seinem Buch [L1]. Ich kann auf dieses interessante Thema hier nicht weiter eingehen. Lassen wir uns aber noch von G.Hardy, dem berühmten Zahlentheoretiker, verblüffen. Hardy, selbst ein glühender Verfechter der reinen Mathematik (er soll den Trinkspruch getan haben: "Auf die reine Mathematik! Möge sie nie irgendeinen Nutzen haben!" ([K2,S.295])), sagte zum Thema Exaktheit/Beweis:"Im strengen Sinn gibt es so etwas wie einen mathematischen Beweis nicht,... in letzter Hinsicht könenn wir nichts tun als hinweisen,... Beweise sind, was Littlewood und ich "Geplauder" nennen, rhetorische Floskeln, die die Psychologie [des Zuhörers] beeinflussen, Zeichnungen auf der Tafel in Vorlesungen, Mittel, um die Vorstellungskraft der Schüler anzuregen". Kline kommentiert diesen Ausspruch, für Hardy seien Beweise eher die Fassade als die tragenden Säulen des Gebäudes der Mathematik ([KL,S.314]). Feststehen dürfte, daß Exaktheit, Strenge und Logik im Moment des Entstehens mathematischer Erkenntnis eine geringe Rolle gegenüber der Intuition spielen; das Material wird im nachhinein für Zwecke der Kommunikation (Vorträge, Artikel, Bücher) entsprechend zugerichtet. H.Weyl meinte: "Logik ist die Hygiene, die der Mathematiker anwendet, um seine Ideen gesund und stark zu erhalten."

4.2. Mathematische Modelle

In dem Moment, in dem Mathematik ihren Status als der Natur inhärente Struktur verliert, stehen sich Realität und das zur Beschreibung (nicht Erklärung!) verwendete mathematische Modell als Verschiedene gegenüber. Sofort erheben sich Fragen nach Genauigkeit und Geltungsbereich des Modells; nach dem Grund, wieso Mathematik überhaupt anwendbar ist, usw. Außerdem tritt aber der aktive Aspekt der (wissenschaftlichen) Tätigkeit klarer heraus: Erstens äußert sich die Natur nicht von vornherein in mathematischer Weise zu uns, sie muß erst durch entsprechende messende oder experimentelle Zurichtung dazu gebracht werden (vgl.dazu [G]). Zweitens bedeutet die Entscheidung für ein bestimmtes Modell ja immer, daß gewisse Züge der realen Situation zu wesentlichen, andere zu unwesentlichen gemacht werden, indem sie vom Modell erfaßt werden oder nicht. Diese Reduktion der Komplexität der realen Situation durch das Ausfiltern gewisser Aspekte mit Hilfe des Modells ist ja überhaupt der springende Punkt bzw. der Grund, es überhaupt anzuwenden. Das bedingt aber auch, daß mit der zunehmenden Verwendung mathematischer Modelle in einer bestimmten Wissenschaft jene Aspekte chronisch zu kurz kommen, die sich mathematischer Formulierung am hartnäckigsten entziehen ("menschliche" Aspekte). Überdies beinhaltet aber jedes Modell sozusagen als unerwünschten Nebeneffekt gewisse Elemente, die über die realen Gegebenheiten des Untersuchungsgegenstandes hinausgehen. Als Beispiel sei der Radfahrer in der Bewegungsaufgabe in der AHS genannt: In der Realität ein Mensch von bestimmtem Äußeren, mit gewissen Sorgen und Wünschen, der sich mühsam abstrampelt, degeneriert er zu einem (gleichförmig bewegten!) Punkt auf der x-Achse, die wiederum der durchaus endlichen Straße im Modell eine unendliche Länge und dazu alle Charakteristika des reellen Kontinuums verleiht. Oder - weniger harmlos - aus einem lebenden Menschen in seiner ganzen Individualität wird in den Überschlagsrechnungen der Nuklearstrategen ein Millionstel jener so viesagenden Einheit "1 Megadeath".

Das alles soll natürlich nicht heißen, daß Erstellung und Anwendung mathematischer Modelle an und für sich etwas Teuflisches darstellt; es soll aber darauf hinweisen, daß Entscheidungen über Art, Ausmaß und konkrete Umstände der Anwendung keine Fragen der Mathematik oder der Naturwissenschaften sind, sondern Fragen der Interessenlage der Beteiligten oder Betroffenen, somit - im weitesten Sinn - politische Fragen, "Fragen der Herrschaft", wie sich M.Schmutzer und E.Matzner ausdrücken ([SM]). Denn jeder Bereich, in dem Wahlmöglichkeiten zwischen Alternativen gesellschaftlicher Tätigkeit bestehen, ist ein Bereich, in dem Fragen der Machtkonstellation eine Rolle spielen. Gefährlich wird es dann, wenn diese Tatsache verschleiert werden soll, indem für den gesellschaftlichen Entscheidungsspielraum zu Unrecht mathematisch-naturwissenschaftliche Unumstößlichkeit beansprucht wird. Täglich erleben wir in vielen Bereichen Versuche, solche Entscheidungen, bei denen technische oder mathematisch-naturwissenschaftliche Fragen eine Rolle spielen, dem politischen Prozeß zu entziehen (Atomkraftwerke, Rüstung und Kriegstreiberei, Rhein-Main-Donau-Kanal, städtischer Verkehr usw.).

4.3. Wieso ist Mathematik überhaupt anwendbar?

Sieht man Mathematik einmal nicht mehr als in der Natur selbst enthaltene Struktur, so stellt sich sofort die Frage, wieso das Menschenwerk bzw.das rein logische Konstrukt Mathematik so vielfältig und erfolgreich anwendbar ist, speziell in den Naturwissenschaften.

Selbst bedeutende Mathematiker und Physiker, die sich auch mit wissenschaftstheoretischen und philosophischen Fragen befassen, schweigen zu dieser Frage, verweisen auf angeblich Kompetentere (so z.B. der Physiker F.Dyson in [D] auf seinen Kollegen E.Wigner), die aber dann manchmal selbst von einer verblüffenden Tatsache oder einem Rätsel sprechen (so Wigner in seinem Artikel [W] unter dem Titel "The unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences").

Meiner Meinung nach sollten wir uns hier nicht mit dem Glauben an ein Wunder zufrieden geben. Allerdings handelt es sich um eine schwierige Frage mit vielerlei Aspekten. Viele Philosophen, Mathematiker, Naturwissenschaftler und andere haben sich zu diesem Thema geäußert, man findet eine Vielzahl von Meinungen. Ich möchte mich hier auf die Formulierung zweier in gewissem Sinn entgegengesetzter Erklärungsansätze beschränken, von denen aber sicher keiner allein imstande ist, die Frage nach dem Grund der Anwendbarkeit befriedigend zu beantworten.

1. Mathematik ist der realen Welt "nachgebildet" und deswegen wieder auf sie anwendbar.
2. Mathematik gibt in gewissem Sinn die Formen vor, in denen wir die Welt überhaupt (naturwissenschaftlich) anschauen können. Deshalb läßt sie sich auf solcherart gewonnene Erkenntnis notwendigerweise erfolgreich anwenden.

Der zweite Standpunkt drückt also aus, daß überhaupt nur die quantifizierbaren Aspekte der Welt den Gegenstand der Naturwissenschaften bilden, und daß das, was (noch) nicht quantifizierbar ist, quantifizierbar gemacht werden (!) soll (Galilei). Die mathematische Sicht wählt gewissermaßen das zu ihrem Gegenstand, das für sie (zum jeweiligen geschichtlichen Zeitpunkt!)

überhaupt behandelbar gemacht werden kann (nicht:"behandelbar ist", denn wie schon gesagt, muß die Natur für die Physik - genauer: für das physikalische Experiment - erst entsprechend "zugerichtet" werden, ehe sie quantifizierender Behandlung zugänglich gemacht werden kann. Man denke im Extremfall an die modernen Teilchenbeschleuniger: Ist der Zustand, in den winzige Bruchteile irdischer Materie dort mit Riesenaufwand versetzt werden, um ihre Struktur zu untersuchen, etwa der "natürliche Zustand", in dem sie sich uns konkret im Alltag repräsentiert?).

4.4. Zukunft der Mathematik

Das ist natürlich eine Frage, in der jeder nach Herzenslust spekulieren kann. Extreme Optimisten werden ebenso wie extreme Pessimisten genügend Anhaltspunkte in der historischen Entwicklung und in der heutigen Situation finden, mit denen sie ihre Standpunkte untermauern können. - Eine Sammlung von Aufsätzen zu diesem Thema findet sich in [S]. - Für die zukünftige Entwicklung der Mathematik scheinen mir die folgenden Aspekte am bedeutendsten:

- der zunehmende Einsatz von Computern verleiht der endlichen Mathematik sowie konstruktiven Verfahren wachsende Bedeutung;
- die Mathematik ist bereits heute dermaßen aufgesplittert und spezialisiert, daß ein Mathematiker die Arbeiten eines "Fachkollegen" aus einem entfernteren Gebiet kaum auf Anhieb verstehen oder würdigen kann;
- die Kluft zwischen reiner und angewandter Mathematik vertieft sich, wir finden sogar schon glaubenskriegartige gegenseitige Attacken. Einzelne Wissenschafter machen sich auf institutioneller Ebene heutzutage schon "ihre eigene Mathematik". Der "reine Mathematiker" als Gesprächspartner des "Anwenders" existiert praktisch nicht mehr.

Welche Konsequenzen wird die Trennung dieses für beide Seiten so fruchtbaren Verhältnisses für die Mathematik haben? Wird sie in ein blutleeres Glasperlenspiel ausarten? Kline vertritt in seinem Buch die Auffassung, daß die Weiterentwicklung der

Mathematik, aber auch ihre Grundlagenfragen, um deren Lösung sich so viele ohne durchschlagenden Erfolg bemüht haben, nur im Zusammenhang mit der Anwendbarkeit der Mathematik gesehen werden kann. Er warnt vor der Isolierung der Mathematik von den anderen Wissenschaften ([K2, Kap.XIII-XV]).

Lassen wir zum Abschluß die Bourbaki-Schule und H.Weyl zum Problem der Zukunft und des Wesens der Mathematik zu Wort kommen ([K2, S.6]):

"Seit frühesten Zeiten sind alle kritischen Revisionen der Grundlagen der Mathematik als ganzes oder eines ihrer Zweige fast ausnahmslos auf Perioden der Unsicherheit gefolgt, in denen Widersprüche auftauchten und gelöst werden mußten ... Nun sind es 25 Jahrhunderte, während derer die Mathematiker lernten, ihre Fehler zu korrigieren und ihre Wissenschaft dadurch bereichert und nicht verarmt sahen; das gibt ihnen das Recht, der Zukunft mit Gelassenheit entgegenzusehen."

"Die Frage der Grundlegung und der letzten Bedeutung der Mathematik bleibt offen; wir wissen nicht, in welcherRichtung sie ihre endgültige Lösung finden wird oder ob überhaupt eine endgültige objektive Antwort erwartet werden kann. "Mathematisieren" könnte sehr wohl auch eine kreative Aktivität des Menschen sein, wie Sprache oder Musik, von elementarer Ursprünglichkeit, deren historischer Werdegang eine vollständige objektive Rationalisierung verweigert".

5. Schlußbemerkungen

Abschließend möchte ich noch folgendes bemerken: Das Wahrheitsproblem der Mathematik konnte hier nur auf einer sehr oberflächlichen Ebene behandelt werden; für eine genauere Untersuchung müßten vor allem auch sprachphilosophische Gesichtspunkte einbezogen werden. Außerdem ist unsere Beschreibung des historischen Ablaufs gewissermaßen rein äußerlich; die viel größere und schwierigere Frage nach den Gründen und gesellschaftlichen Bedingtheiten dieser Entwicklung muß hier leider völlig offen bleiben. Allerdings halte ich eine solche "phänomenologische" Beschreibung für eine notwendige Vorbedingung für die Reflexion der weiteren Zusammenhänge, da sie hilft, die Fiktion einer absoluten, unhistorischen Objektivität der Mathematik zu durchbrechen und sie so einer historischen Analyse im vollen Sinn des Wortes prinzipiell zugänglich zu machen. In diesem Sinne möchte ich auch die Lektüre des so oft zitierten Buches von Kline ([K2]) allen, die mit Mathematik zu tun haben, wärmstens empfehlen.

LITERATUR

[D] DYSON, F.J.: Mathematics in the Physical Sciences, Scientific American 211 (1964) (3) Sept.1964,128-146.

[G] GREIFF, B.v.: Gesellschaftsform und Erkenntnisform, Campus-Verlag Frankfurt, 2.Aufl.,1977.

[H] HILBERT, D.: Über das Unendliche.Math.Ann.95 (1926) 161-190.

[K1] KLINE, M.: Les fondements des mathématiques, La Recherche 54 (mars 1975), 200-208.

[K2] KLINE, M.: Mathematics - The Loss of Certainly, Oxford University Press, New York 1980, 2nd printing 1981.

[L1] LAKATOS, I.: Proofs and Refutations, Cambridge University Press, Cambridge 1976.

[L2] LAKATOS, I.: Cauchy and the Continuum, The Mathematical Intellegencer, 1 (1978), 151-161.

[S] STEEN, L.A.: (ed.), Mathematics Tomorrow, Springer-Verlag, New York 1981.

[SM] SCHMUTZER,M.E.A., MATZNER,E.: Models of Society in the Social Sciences, Preprint, TU Wien, Institut für Finanzwissenschaften und Infrastrukturpolitik, Wien 1977.

[W] WIGNER, E.P.: The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Comm.on Pure and Appl.Math. 13 (1960), 1-14.

- - - - - - - - - -

CALDER,A.: Constructive Mathematics, Scientific American 241 (1979) (4) Oct.1979, 134-143.

EMBACHER,F.: Die Odyssee der Abstraktion, S.64-72 in: Begriff, Geschichte und Kritik der modernen Naturwissenschaft, Hrsg. Roter Vektor, StRVen Physik und Mathematik, Wien 1981.

LAKATOS,I.: A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics, The Britain Journal for the Philosophy of Science, 27 (1976), 201-233.

MAC LANE,S.: Mathematical Models: A Sketch for the Philosophy of Mathematics, Amer.Math.Monthly 88 (7), 1981, 462-472.

MUSGRAVE,A.:Logicism Revisited, The British Journal for the Philosophy of Science, 28 (1977), 99-127.

QUINE, W.V.: The Foundations of Mathematics, Scientific American 211 (1964) (3) Sept.1964, 112-127.

REITER,W.: Einige Bemerkungen zur Kritik der Naturwissenschaften, S.29-46 in: Begriff, Geschichte und Kritik der modernen Naturwissenschaft, Hrsg. Roter Vektor, StRVen Physik und Mathematik, Wien 1981.

SNAPPER,E.:Are Mathematical Theorems Analytic or Synthetic? The Mathematical Intelligencer 3 (2) (1981),85-88.

SOHN-RETHEL,A.: Geistige und körperliche Arbeit, Suhrkamp, Frankfurt a.Main, 1970.

SOHN-RETHEL,A.: Warenform und Denkform, Suhrkamp, Frankfurt/Main, 1978.